

Aufgaben zum Tutorium am 09.11.2015

Teil I: Grundlagen

Aufgabe T4.1

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $3x + 2 = 7x + 8$

(b) $\frac{2x+1}{2} + \frac{3x+1}{4} + \frac{5x+1}{8} = 1 - \frac{7x+1}{8}$

(c) $x^2 - 4x - 5 = 0$

(d) $(3x-5)^2 - (2x+5)^2 = 0$

(e) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Hinweis zu (e): Substitution

Teil II: Wiederholung und Vertiefung

Aufgabe T4.2

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den angegebenen Gliedern auf Konvergenz bzw. Divergenz und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert:

(a) $a_n := \frac{3n^2 + n - 1}{4n^2 + 8n + 2}$

(b) $a_n := \frac{10n^7 - 1 + n^5}{8n^2 + 1 - 11n^6}$

(c) $a_n := \sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-6\sqrt{n}}$

(d) $a_n := \frac{(2n+1)^2}{n-1} - 4n + 4$

(e) $a_n := \left(3n^2 + 5n + 1\right)^{\frac{1}{2}} - n$

(f) $a_n := \frac{b_n + n^2 - 3}{n^2 - 1}$, wobei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge ist, für die $b_n \in (-8, -1] \cup (1, 3]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe T4.3

(a) Gegeben sei die konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1$,

$$a_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}, \quad a_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}, \quad a_4 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}, \quad \dots$$

Berechnen Sie den Grenzwert dieses Kettenbruchs.

(b) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$a_0 = 2, \quad a_n = \frac{3}{4 - a_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe T4.4

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU Cottbus WS 2012/13)

Ein Fass mit einem maximalem Fassungsvermögen von 100 Liter enthält 20 Liter Wasser und ist porös. Eine Sisyphusarbeit: Karl-Otto rennt mit einem Eimer hin und her und schüttet in Abständen von einer Minute 5 Liter in den Behälter. Leider sickert umso mehr Wasser durch die Löcher, je weiter das Fass bereits gefüllt ist. Während Karl-Otto hin und her läuft verliert das Fass wieder 10% seines eben noch vorhandenen Inhalts.

- (a) Formulieren Sie die Füllmenge des Fasses als rekursive Folge.
- (b) Untersuchen Sie die Existenz eines Grenzwertes?
- (c) Wird das Fass jemals voll? Falls nicht, wo liegt seine Grenze?