

Aufgaben zum Tutorium am 16.11.2015

Teil I: Grundlagen

Aufgabe T5.1

Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Ungleichungen durch äquivalente Umformungen nach:

(a) $n^4 - 3n^3 + n^2 - 33n + 6 > n^3 + n^2 - 33n + 3$ für alle $n \geq 4$

(b) $\frac{3n+8}{4n^2-n+1} > \frac{3n^2-n+8}{4n^3+7}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(c) $-\frac{2n^2-1}{2n^3+1} \geq -\frac{2n^3+1}{2n^2+3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe T5.2

Berechnen Sie durch Anwendung der Potenzgesetze und *ohne* Taschenrechner:

(a) $3^4 \cdot 27^2 \cdot 9^{-5}$

(b) $125^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5} \cdot 25^2$

(c) $(32^3)^2 \cdot (54^4)^{-2} \cdot 12^{(-2^3)} \cdot 3^{(3^3)}$

Teil II: Wiederholung und Vertiefung

Aufgabe T5.3

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

(a) $a_n := \frac{2}{9}n + \frac{2}{3} \left\lfloor -\frac{n}{3} \right\rfloor + (-1)^n \frac{n^3+1}{2n^3-1}$

(b) $a_n := (-1)^n \left(n - 5 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \right) \cdot \frac{3n^5 - 8n + 1}{4n^5 - 2n^4 + n}$

(c) $a_0 = 4, a_1 = 5, a_{n+2} = (-1)^{n+1} \frac{a_{n+1}}{\min(a_n, a_{n+1})}, n \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe T5.4

Geben Sie jeweils ein Beispiel einer unbeschränkten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die

- (a) keinen Häufungspunkt,
- (b) genau einen Häufungspunkt,
- (c) mindestens zwei verschiedene Häufungspunkte

besitzt.

(Aufgaben T5.5 und T5.6 - siehe Seite 2)

Aufgabe T5.5

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{9}\right)^n$
- (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2} - 2}{6^k}$
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \min\left(\frac{3}{5}, \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

Teil III: Ergänzungen

Aufgabe T5.6

Im Jahre 1904 stellte der schwedische Mathematiker Helge von Koch eine Kurve vor, die zur damaligen Zeit auch als Monsterkurve bezeichnet wurde. Die Konstruktion der Kurve beginnt mit einer einzigen Geraden der Länge x (Koch-Kurve nullter Ordnung). Diese Gerade wird in drei gleich lange Abschnitte unterteilt, das mittlere Segment wird durch zwei Geraden der Länge $\frac{x}{3}$ ersetzt. (Koch-Kurve erster Ordnung). Dieses Prinzip von Teilen und Ersetzen wird nun auf jedes der vier Geradensegmente angewendet, d.h. zur Konstruktion der Koch-Kurve zweiter Ordnung wird jede Gerade in der Koch-Kurve erster Ordnung durch vier Geraden der Länge $\frac{x}{9}$ ersetzt.

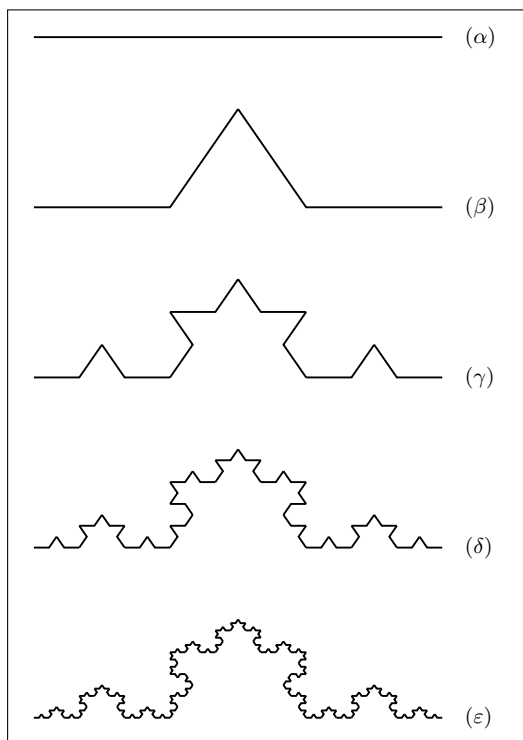


Abb. 1: Koch Kurve nullter (α), erster (β), zweiter (γ), dritter (δ) und vierter (ε) Ordnung.

Durch Ersatz jeder Gerade in der Koch-Kurve zweiter Ordnung durch vier Geraden der Länge $\frac{x}{27}$ entsteht die Koch-Kurve dritter Ordnung. Dieses Prinzip kann bis zu einer beliebigen Ordnung $n \in \mathbb{N}$ fortgesetzt werden. Setzt man drei Koch-Kurven geeignet aneinander, dann erhält man daraus die Kochsche Schneeflocke (Abb. 2).

- (a) Bestimmen Sie für beliebiges $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ die Länge der Koch-Kurve n -ter Ordnung. Ist die Länge für $n \rightarrow \infty$ endlich?
- (b) Bestimmen Sie für beliebiges $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ den Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke n -ter Ordnung. Ist der Flächeninhalt für $n \rightarrow \infty$ endlich?

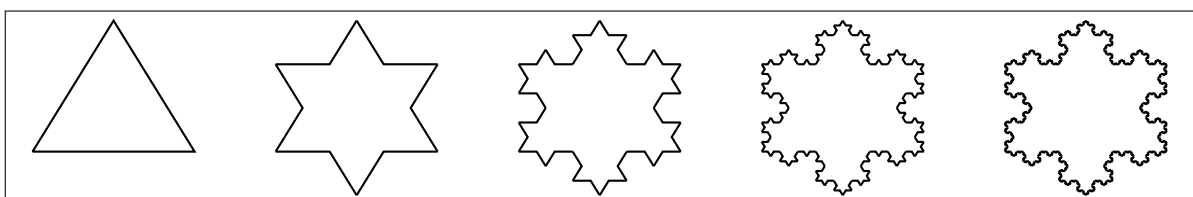


Abb. 2: Kochsche Schneeflocke nullter, erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung (v.l.n.r.).