

Aufgaben zum Tutorium am 23.11.2015

Teil I: Grundlagen

Aufgabe T6.1

Die Fakultät $n!$ von $n \in \mathbb{N}_0$ wird definiert durch $0! := 1$ und

$$n! := (n-1)! \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^n k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zu $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ wird der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

(a) Berechnen Sie $n!$ für $n = 2, 3, 4, 5$ sowie $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{3}$ und $\binom{5}{4}$.

(b) Verifizieren Sie, dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$(i) \quad \binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1} \binom{n}{k}$$

$$(ii) \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$(iii) \quad \binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$$

(c) Kürzen Sie die folgenden Quotienten:

$$(i) \quad \frac{(n+5)!}{n!}$$

$$(ii) \quad \frac{(3n)!}{n!}$$

$$(iii) \quad \frac{n!!}{n!}$$

$$(iv) \quad \frac{(n^3)!}{(n^2)!}$$

(d) Drücken Sie das Produkt $\prod_{k=2}^{10} (2n+k)^{-1}$ als Quotient von zwei Fakultäten aus.

Teil II: Wiederholung und Vertiefung

Aufgabe T6.2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n}{(n!)^2}$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{3}} \right)^{n^2}$$

$$(c) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \quad \text{Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt!}$$

$$(d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ mit } a_n := (-1)^n + \frac{3}{n} \text{ für } n < 1000, a_n := \frac{n^3+1}{n^2+10} \text{ für } 1000 \leq n < 10^6 \text{ bzw. } a_n := \frac{2n+1}{2^{2n+1}} \text{ für } n \geq 10^6.$$

$$(e) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(-1)^{n^2} + n}$$

(Aufgabe T6.3 - siehe Seite 2)

Aufgabe T6.3

- (a) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{n} \right)^n$ konvergent?
- (b) Zeigen Sie mit dem Majorantenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{8^n + \sqrt{3^n}}$ konvergiert.
- (c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{5|x|} \right)^n$, wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig ist.
- (d) Begründen Sie, warum die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n-1}$ divergiert.