Aufgaben zum Tutorium am 30.11.2015

Teil I: Grundlagen

Aufgabe T7.1

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $\sqrt{x+2} \;=\; 3 - \sqrt{x}$

(b) $\left|4x^2 + 4x - 4\right| \;=\; 3$ *Hinweis zu (b): Fallunterscheidung!*

Aufgabe T7.2

Eine Funktion $f : D \to W$ ist eine Zuordnung, bei der jedem Element $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ genau ein Element $y \in W \subseteq \mathbb{R}$ durch eine Zuordnungsvorschrift $x \mapsto y = f(x)$ zugeordnet wird. Bei welchen der folgenden (ggf. erst noch nach y aufzulösenden) Zuordnungsvorschriften handelt es sich um Funktionen? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $y = 2x^2 + 1$

(b) $y^2 = x^2 + 1$

(c) $y = \begin{cases} 5x - 3\sqrt{x} + 1 & , \quad x \leq 4 \\ \left|x - 7\right| + 5x - 8 & , \quad x \geq 4 \end{cases}$

(d) $\left|y\right| = 1 - \sqrt{x}$

(e) $y = \left|1 - \sqrt{x}\right|$

(f) $y = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 7 & , \quad x \leq 3 \\ \left|8 - 5x\right| + 2x + 5 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$

Teil II: Wiederholung und Vertiefung

Aufgabe T7.3

(a) Untersuchen Sie die Reihe

$$R := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$$

mit dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen auf Konvergenz. Ist die Reihe absolut konvergent?

Hinweise: Zeigen Sie zuerst, dass $3^n > n^4$ für $n \geq 8$ gilt. Beachten Sie auch, dass das Leibnizkriterium für $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ auch dann erfüllt ist, wenn die Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und erst ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ monoton ist.

(b) Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{5}{(n-1)^2} & , \quad n \in \left\{2k \mid k \in \mathbb{N}_0\right\} \\ \dfrac{2}{(n+1)^2} & , \quad n \in \left\{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}_0\right\} \end{cases}$$

konvergent? Warum ist hier das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen nicht anwendbar?

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(Aufgabe T7.4 - siehe Seite 2)

Aufgabe T7.4

(a) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5n-1)(5n+4)}$$

mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung der Reihenglieder. Ist mit Hilfe des Quotientenkriteriums eine Aussage zur Konvergenz möglich?

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegungen der folgenden Ausdrücke:

(i) $\dfrac{2-5x}{x^2+x-6}$

(ii) $\dfrac{2}{\big(x^2+x-6\big)\big(x^2+1\big)}$

(iii) $\dfrac{2}{(3x-6)(7x+21)}$