

Aufgaben zum Tutorium am 07.12.2015

Aufgabe T8.1

Sei $\alpha \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl. Man kann zeigen, dass es eine kleinste natürliche Zahl n_0 gibt, für die

$$\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 > n$$

mit $n := n_0$ gilt. Was ist die Grundlage dafür, dass die Gültigkeit der Ungleichung auch für $n := n_0 + 123$ nachgewiesen werden kann?

- ☐ (a) Axiom des Archimedes
- ☐ (b) Peano-Axiome

Aufgabe T8.2

Die Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ seien beschränkt und für alle $b \in B$ gelte $b \neq 0$. Was lässt sich über die Menge $C := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A, b \in B \right\}$ aussagen?

- ☐ (a) Die Menge C ist beschränkt.
- ☐ (b) Die Menge C ist unbeschränkt.
- ☐ (c) Es ist keine Aussage über die Beschränktheit von C möglich.

Aufgabe T8.3

Sei $M \subseteq \mathbb{Q}$ eine nach unten beschränkte Menge. Welche Aussage folgt daraus?

- ☐ (a) M besitzt ein Minimum in $\mathbb{R}$.
- ☐ (b) M besitzt ein Minimum in $\mathbb{Q}$.
- ☐ (c) Das Infimum von M liegt in $\mathbb{R}$.
- ☐ (d) Das Infimum von M liegt in $\mathbb{Q}$.

Aufgabe T8.4

Für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\sqrt[n]{|a_n| + \frac{1}{4}} < \frac{3}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Was lässt sich über die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ aussagen?

- ☐ (a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.
- ☐ (b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.
- ☐ (c) Es ist keine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ möglich.

Aufgabe T8.5

Gegeben sei die komplexe Zahl $a := 1 - 17i$. Welchen Imaginärteil hat $z := a^k \cdot \bar{a}^k$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?

- ☐ (a) $\operatorname{Im}(z) = -289^k$
- ☐ (b) $\operatorname{Im}(z) = 289^k$
- ☐ (c) $\operatorname{Im}(z) = 0$

Aufgabe T8.6

- (a) Zeigen Sie, dass $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (b) Bestimmen Sie - im Falle ihrer Existenz - Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{|2x-4|+6}{x+3} \geq 2x$.
- (c) Stellen Sie die komplexe Zahl $v := \frac{i}{1+2i} + \frac{3}{4i}$ in der Form $a+bi$ dar.

Aufgabe T8.7

- (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{4+2n-3n^2}{2n^2-2} \right) \cdot \left(\frac{2-3n}{n+3} \right)^2 + \frac{3n^3+(-1)^n n^2-1}{(-1)^n+2n-8n^3}$.
- (b) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-6\sqrt{n}}$?
- (c) Zeigen Sie mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^2-1}{2-n^2}$ konvergiert. (Hinweis: Stellen Sie zunächst eine Vermutung für den Grenzwert auf.)
- (d) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ mit $a_n := (-1)^n \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} + 3n - 9 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$
- (e) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $a_0 := 2$ und $a_{n+1} := \frac{1}{5}(a_n^2 + 4)$ konvergiert. (Hinweise: Der Grenzwert muss und soll nicht ausgerechnet werden!)

Aufgabe T8.8

- (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{5}{7} \right)^n$
- (b) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{7n^2}$ absolut konvergent?
- (c) Warum ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2-3n+100}{4n^2-2n+2000000}$ nicht konvergent?
- (d) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+n^3}{3-4n^3} \right)^n$ konvergent bzw. absolut konvergent?
- (e) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{3n^2+9}$ mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums auf Konvergenz.

Aufgabe T8.9

Die Verkettung $f \circ g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ zweier Funktionen $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \rightarrow D_f \subseteq \mathbb{R}$ ist definiert als die Hintereinanderausführung der Funktionen, d.h. $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ für alle $x \in D_g \subseteq \mathbb{R}$. Berechnen Sie für die nachfolgenden Funktionen f und g jeweils die Funktionswerte $(f \circ g)(1)$ und $(g \circ f)(1)$:

- (a) $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = 2x - 7$
- (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ und $g(x) = 2^{x+2}$
- (c) $f(x) = \begin{cases} 5x+1 & , \quad x < 2 \\ 11-\sqrt{x} & , \quad x \geq 2 \end{cases}$ und $g(x) = \begin{cases} 2x^2-3x+5 & , \quad x < 3 \\ x^3-13 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$