

Aufgaben zum Tutorium am 14.12.2015

Teil I: Grundlagen

Aufgabe T9.1

Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und den Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ der Funktionen $f : D \rightarrow W$:

(a) $f(x) = x^2 + 2$

(b) $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}$

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 2x + 5}}{2x}$

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 2x + 5}}{2x^2}$

(e) $f(x) = \sqrt{|x-2| - |x-5|}$

(f) $f(x) = \begin{cases} 2 \cos(x) & , \quad x \in (\infty, 0) \\ 5x^2 - 3x + 2 & , \quad x \in [0, 1) \\ 5 - \exp(1-x) & , \quad x \in (1, \infty) \\ -3 & , \quad x = 1 \end{cases}$

Aufgabe T9.2

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und sie heißt *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Welche der folgenden Funktionen $f_1, \dots, f_{10} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind gerade bzw. ungerade?

$$f_1(x) = x \quad ; \quad f_2(x) = x^2 \quad ; \quad f_3(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ -x^2 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad ; \quad f_4(x) = x^2 + x \quad ; \quad f_5(x) = \cos(x)$$

$$f_6(x) = \sin(x) \quad ; \quad f_7(x) = x^2 \cos(x) \quad ; \quad f_8(x) = x \sin(x) \quad ; \quad f_9(x) = \cos(x) \sin(x) \quad ; \quad f_{10} = e^{\sin(x)}$$

Teil II: Wiederholung und Vertiefung

Aufgabe T9.3

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionsgrenzwerte existieren, und geben Sie diese ggf. an (ohne die eventuell bereits aus der Schule bekannte Regel von l'Hospital zu verwenden):

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^x)^{-1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - 6x^4}{6x^3 + x^4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1-x^2} \right)$

(Aufgaben T9.4 und T9.5 - siehe Seite 2)

Aufgabe T9.4

Bestimmen Sie die Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{Q}$ derart, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3 - (b+2)x^2 + (2b-3)x + 3b}{x^2 - 8x + 15} & , \text{ für } x < 3 \\ ax^2 - x & , \text{ für } x \in [3, 5] \\ x \cos(x - 5) & , \text{ für } x > 5 \end{cases}$$

in den Punkten $x = 3$ und $x = 5$ stetig ist. Ist f damit auf $\mathbb{R}$ stetig?

Aufgabe T9.5

Geben Sie jeweils ein Beispiel an, so dass

- (a) die Summe $f + g$,
- (b) das Produkt $f \cdot g$ bzw.
- (c) die Verkettung $f \circ g$

zweier *unstetiger* Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.