

Aufgaben zum Tutorium am 11.01.2016

Teil I: Grundlagen

Aufgabe T11.1

Berechnen Sie ohne Taschenrechner (und auch ohne andere technische Hilfsmittel):

- (a) $20,87 + 1,2305 + 82,4 + 101,123 + 8,567 + 2,111 + 13,451 + 1,23456$
- (b) $1,234 \cdot 2,134 \cdot 12,0013$
- (c) $\sum_{n=0}^5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
- (d) $\sum_{n=2}^{100} \frac{(-1)^{4n-2} - 6}{1 + \sqrt{6}}$
- (e) $\ln(\sqrt{e})$
- (f) $\ln(\sqrt{9e} \cdot e^2)$

Teil II: Wiederholung und Vertiefung

Aufgabe T11.2

- (a) Bestimmen Sie mit der Regel von l'Hospital den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.
- (b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \cos(x)}$ nach der Regel von l'Hospital.
- (c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x) + 1}{x}$ nach der Regel von l'Hospital.
- (d) Gegeben sei die reellwertige Funktion $f : (-\pi, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} & , \quad x < 0 \\ \frac{\cos(x) - 1}{x} & , \quad x > 0 \\ c & , \quad x = 0 \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$. Kann man die Konstante c in der Funktion g so wählen, dass g in $x = 0$ stetig ist?

- (e) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{\exp(x^2 - 1) - x^2}{x^{-2} - \exp(1 - x^2)}.$$

Weisen Sie nach, dass die Funktion f in $x = 1$ stetig ergänzbar ist, indem Sie den Grenzwert $f(1) := \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ berechnen. Geben Sie außerdem den Grenzwert $f(-1) := \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ an, ohne diesen zu berechnen (mit Begründung).

(Prüfungsaufgabe Mathematik IT-3, BTU-Cottbus, WS 2012/13)

- (f) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \uparrow 1} (1-x)^{6(1-x)}$ mit der Regel von l'Hospital.
- (g) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan(x))^{\frac{1}{x}}$ mit der Regel von l'Hospital.

Aufgabe T11.3

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow W$ umkehrbar sind. Falls ja, dann berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \rightarrow D$, geben Sie den Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ von f an und berechnen Sie den Wert der ersten Ableitung von f^{-1} an der Stelle $x_0 = -3$ einerseits direkt mit der Ableitung von f^{-1} , andererseits mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion.

(a) $f : [0, \infty) \rightarrow W$ mit $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1}$

(b) $f : \mathbb{R} \setminus [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.