

Aufgaben zum Tutorium am 25.01.2016

Aufgabe T13.1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^1 x^3 - 3x^2 + 9x + 1 \, dx$

(b) $\int_1^e x^2 \ln(x) \, dx$

(c) $\int \cos(5x)e^{-x} \, dx$

(d) $\int \frac{x+27}{x^2-9} \, dx$

(e) $\int_{-1}^1 |x| + 1 \, dx$

(f) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)+1}{x} \, dx$

(g) $\int_0^y \frac{6(\ln(1+2x))^2}{1+2x} \, dx$, wobei $y \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig ist.

(h) $\int \frac{dx}{x^2+2}$

Hinweis: Substitution $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$

Aufgabe T13.2

Gegeben sei die stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp(3(x-1)) + x^2 + 1 & , \quad x < 1 \\ x^2 + x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f .

Aufgabe T13.3

Zeigen Sie die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{108n+108}{111n^2+222n+245}$ auf verschiedenen Wegen:

(a) durch direkte Rechnung,

(b) mit Hilfe der „Sandwichregel“ und

(c) mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge.

(Hinweis: Alle „Rechenwege“ müssen begründet werden!)

(Aufgaben T13.4 und T13.5 siehe Seite 2)

Aufgabe T13.4

Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Falls eine der Folgen konvergiert, dann berechnen Sie außerdem jeweils den Grenzwert.

(a) $a_n := \frac{3n^5 - 3n^3 + 1}{4n^5 + 4n^2 + n}$ für $n \geq 1$

(b) $b_n := \frac{3n^5 + n^2}{2n^4 + 999999^{1000000}}$ für $n \geq 0$

(c) $c_n := \sqrt{n + 6\sqrt{n}} - \sqrt{n + 4\sqrt{n}}$ für $n \geq 0$

(d) $d_n := \frac{8^n - 2n}{11^n + n^2}$ für $n \geq 0$

(e) $e_n := \sqrt{3n^2 - 1} - \sqrt{4n^2 - \frac{1}{n}}$ für $n \geq 1$

(f) $f_n := \frac{c_n}{a_n} + a_n - \frac{1}{b_n}$ für $n \geq 1$

Aufgabe T13.5

Untersuchen Sie die folgenden divergenten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf die Existenz von Häufungspunkten. Falls Häufungspunkte existieren, dann geben Sie diese an.

(a) $a_n := (-1)^n$

(b) $b_n := \frac{(-1)^n n^2}{2n^2 + n + 5}$

(c) $c_n := \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

(d) $d_n := a_n + b_n$

(e) $e_n := a_n + c_n$

(f) $f_n := b_n \cdot c_n$