

Aufgaben zum Tutorium am 01.02.2016

Aufgabe T14.1

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme:

- (a) $y' = \frac{x}{y}$
- (b) $y' = -\lambda \sqrt[4]{y}$ für beliebiges $\lambda > 0$
- (c) $y' = -\frac{y^2}{x}$ mit $y(2) = \frac{1}{\ln(2)}$
- (d) $(1+x^3)y' - x^2y = 0$ mit $y(1) = 2$
- (e) $y' - y = e^x$ mit $y(0) = 1000$
- (f) $y' = 2x - y$ mit $y(0) = 0$
- (g) $3y' = -2x^2y' - 4xy$ mit $y > 0$ und $y(1) = 2$.
- (h) $2y' + 3xy' = \frac{(2+3x)^5}{y}$, $y > 0$, mit $y(0) = 1$.

Aufgabe T14.2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n := (-1)^n + \frac{3}{n}$ für $n < 1000$, $a_n := \frac{n^3+1}{n^2+10}$ für $1000 \leq n < 10^6$ bzw. $a_n := 0$ für $n \geq 10^6$.
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n := (-1)^n + \frac{3}{n}$ für $n < 1000$, $a_n := \frac{n^3+1}{n^2+10}$ für $1000 \leq n < 10^6$ bzw. $a_n := \frac{2n+1}{2^{2n+1}}$ für $n \geq 10^6$.
- (c) $\sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{n}{3^n}\right)^n$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\left(0, \left(-\frac{2}{9}\right)^n\right)$
- (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3n-2}$

Aufgabe T14.3

- (a) Weisen Sie mit Hilfe des Leibnizkriteriums nach, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n}{4n^2+1}$ konvergiert. Ist die Reihe auch absolut konvergent?
- (b) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{n}\right)^n$ konvergent?
- (c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{8^n+\sqrt{3^n}}$ konvergiert.

(Aufgaben T14.4 bis T14.6 siehe Seite 2)

Aufgabe T14.4

Berechnen Sie:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 7^{n-1}}{4^{2n}}$$

$$(b) \sum_{n=0}^{10} 2^n.$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1} - 3}{8^k}$$

$$(d) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{(-2)^n}$$

Aufgabe T14.5

Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Funktionen und untersuchen Sie, ob die Funktionen auf ganz D stetig sind. Falls dabei eine Funktion in einem oder mehreren Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht definiert sein sollte, dann überprüfen Sie, ob f in x_0 stetig ergänzbar ist.

$$(a) f(x) := \frac{|x| + 3x^2 - 7}{x^2 + |x| + 1}$$

$$(b) f(x) := \frac{x^n - 1}{x^m - 1} \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m \in \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$(c) f(x) := \begin{cases} e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 2\sqrt{x} - 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{12}{x} & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$$

$$(e) f(x) := \frac{2 - \sqrt{3 + 5x}}{5x - 1}$$

$$(f) f(x) := \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & , \quad x \leq -3 \\ \frac{1}{x+4} & , \quad -3 < x \leq -1 \\ \frac{|x-4|}{x+2} & , \quad x > -1 \end{cases}$$

(Hinweis zu (b): Polynomdivision mit $(x - x_0)$ für geeignetes $x_0 \in \mathbb{R}$ im Zähler und im Nenner durchführen!)

Aufgabe T14.6

Kann die Konstante $c \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(a) f(x) = \begin{cases} cx - 3 & , \quad x \leq 2 \\ 3x^2 - c & , \quad x > 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 4x + 7 & , \quad x < 2 \\ 2x^2 + 7 & , \quad x > 2 \\ c & , \quad x = 2 \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist?