

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Aufgaben für die Übungen vom 14. bis 16. Oktober 2015

Aufgabe Ü1.1

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen durch vollständige Induktion:

- (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$.
- (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} k^2 = (n+1)(2n+1)$.
- (c) $a_n := 4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- (d) Es gilt $n^2 > 2n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.
- (e) $n \in \mathbb{N}$ Elemente kann man auf $n!$ verschiedene Arten anordnen.

Aufgabe Ü1.2

Geben Sie die Negation der folgenden Aussagen an:

- (a) $x \leq 3$
- (b) $x \leq 2 \vee x > 3$
- (c) $f \in \{\text{sonnig, warm}\} \vee f \notin \{\text{nass, kalt}\}$
- (d) $\exists z \in \mathbb{Z} \ \forall n \in \mathbb{N} : \left\lfloor \frac{z}{n} \right\rfloor \notin \mathbb{N}_0$
- (e) $\forall z \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + z = 0 \Rightarrow x^2 \in \mathbb{N}$
- (f) In allen schriftlichen Matheprüfungen an der BTU gab es mindestens einen Studenten, der die Prüfung mit der Note 5.0 nicht bestanden hat.
- (g) Es gibt einen Studenten, der alle Vorlesungen besucht, sich aktiv an den Übungen beteiligt, alle Hausaufgaben bearbeitet und sich auch sonst regelmäßig mit den Inhalten der Vorlesung auseinandersetzt. Dieser Student wird die Prüfung höchstwahrscheinlich nicht bestehen.
- (h) Max behauptet: „Inge hat in der Prüfung geschummelt.“.

Aufgabe Ü1.3

Beweisen Sie folgende Behauptungen:

- (a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ gilt: $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
- (b) Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

Aufgabe Ü1.4

In den Lösungen zu Hausaufgaben sind immer wieder fehlerhafte Rechnungen zu sehen. Besonders häufig kommt es dabei zu Fehlern bei Termumformungen. Die nachfolgenden Terme sind fehlerhaft umgeformt. Wo steckt der Fehler, weshalb ist etwas fehlerhaft? Wie müßte eine fehlerfreie Umformung aussehen?

fehlerhafte Termumformungen:

(a) $(2 + 3x) \cdot (3 + 3x) = 5x \cdot 9x = 45x^2$

(b) $8x - (y + 2x) = 8x - y + 2x = 10x - y$

(c) $3(xy) = 3x \cdot 3y$

(d) $-(5x) = -5 \cdot (-x) = 5x$

(e) $8 - 3 + 5 = 8 - 8 = 0$

(f) $-a \cdot \frac{b-1}{2} = -\frac{ab}{2} - \frac{a}{2}$

(g) $\frac{5x-8y}{25x^2-64y^2} = \frac{1}{5x-8y}$

(h) $2(x+y)^2 = (2x+2y)^2 = 4x^2 + 8xy + 4y^2$

(i) $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot 2xy \cdot y^2$

(j) $2^0 = 0$

(k) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}$

(l) $a^x \cdot a^y = a^{xy}$

(m) $2^{3^2} = 8^2 = 64$

(n) $(2^3)^2 = 2^9 = 512$

(o) $\sqrt{25} = -5$

(p) $36 : 6 \cdot 3 = 36 : 18 = 2$

richtige Termumformungen:

$(2 + 3x) \cdot (3 + 3x) =$

$8x - (y + 2x) =$

$3(xy) =$

$-(5x) =$

$8 - 3 + 5 =$

$-a \cdot \frac{b-1}{2} =$

$\frac{5x-8y}{25x^2-64y^2} =$

$2(x+y)^2 = 2(x^2 + 2xy + y^2) =$

$(x \cdot y)^2 =$

$2^0 =$

$9^{-\frac{1}{2}} =$

$a^x \cdot a^y =$

$2^{3^2} =$

$(2^3)^2 =$

$\sqrt{25} =$

$36 : 6 \cdot 3 =$