

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Aufgaben für die Übungen vom 21. bis 23. Oktober 2015

Aufgabe Ü2.1

Welche der reellen Zahlen

$$-22, -\frac{11}{8}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{5}, \frac{9}{4}, \frac{9}{2}, 10, 100, 1000$$

sind untere bzw. obere Schranken der Menge

$$M := \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left(1, \frac{9}{4} \right) ?$$

Geben Sie das Infimum und das Supremum der Menge M an. Hat M ein Minimum und ein Maximum?

Aufgabe Ü2.2

Welche der folgenden Mengen sind nach unten (un)beschränkt, nach oben (un)beschränkt oder (un)beschränkt? Geben Sie Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der Mengen an, falls dies möglich ist.

- (a) $A := (-\infty, 2]$
- (b) $B := (-1, 2]$
- (c) $C := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- (d) $D := \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}, m \leq n \leq 8 \right\}$
- (e) $E := \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}, m \leq n \right\}$
- (f) $F := \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}, 0 < |m| \leq |n| \right\}$
- (g) $G := [1, 2) \cup (20, 30) \cup \{51\}$
- (h) $H := \{q \in \mathbb{Q} \mid |q| > \frac{8}{7}\}$
- (i) $I := \{x \in \mathbb{R} \mid -4x^2 + 2x + 16 \geq -2x^2 - 2x\}$
- (j) $J := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{|x-2|}{x+4} < x \right\}$

Aufgabe Ü2.3

Begründen Sie, warum die Menge $M = (\sqrt{2}, 1)$ im Körper $\mathbb{R}$ ein Infimum besitzt, im Körper $\mathbb{Q}$ dagegen nicht.

Aufgabe Ü2.4

Bei der Lösung von Gleichungen und Ungleichungen kommt es immer wieder zu Fehlern, die häufig auf fehlerhafte Termumformungen zurückzuführen sind. Die nachfolgenden Rechnungen zur Bestimmung der Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der vorgelegten Gleichungen und Ungleichungen sind falsch oder unvollständig. Wo steckt/stecken der/die Fehler? Weshalb ist die Rechnung falsch? Wie lautet die richtige Lösung?

(a) $\frac{9}{4} = 1 + \frac{x}{20} \Leftrightarrow 45 = 1 + x \Leftrightarrow x = 44 \Rightarrow \mathcal{L} = \{44\}$

(b) $\frac{(x-2)^2 - 1}{x-3} = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = 1 \Rightarrow \mathcal{L} = \{1, 3\}$

(c) $x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \mathcal{L} = \{3\}$

(d) $3 + \sqrt{3x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x} = -3 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \mathcal{L} = \{3\}$

(e) $\frac{1}{x} = a + b, a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right\}$

(f) $|x - 1| = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow \mathcal{L} = \{2\}$

(g) $x^2 > 16 \Leftrightarrow x > 4 \Rightarrow \mathcal{L} = (4, \infty)$

(h) $x^2 < 16 \Leftrightarrow x < 4 \Rightarrow \mathcal{L} = (-\infty, 4)$

(i) $-2(x+1) > 10 \Leftrightarrow x+1 > -5 \Leftrightarrow x > -6 \Rightarrow \mathcal{L} = (-6, \infty)$

(j) $\frac{4}{x-2} < x \Leftrightarrow 4 < x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x < 1 - \sqrt{5} \vee x > 1 + \sqrt{5}$
 $\Rightarrow \mathcal{L} = (-\infty, 1 - \sqrt{5}) \cup (1 + \sqrt{5}, \infty)$