

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Aufgaben für die Übungen vom 28. bis 30. Oktober 2015

Aufgabe Ü3.1

Welche der folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind arithmetische Folgen, geometrische Folgen und/oder alternierende Folgen? Untersuchen Sie die Folgen zudem auf Beschränktheit und diskutieren Sie die Monotonie. Welche der Folgen ist konvergent, welche divergent?

	arithmetisch	geometrisch	alternierend	beschränkt	monoton fallend	monoton wachsend	konvergent	divergent
(a) $a_n := n + 3$ für $n \in \mathbb{N}_0$								
(b) $a_n := \frac{1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$								
(c) $a_n := \frac{(-1)^n}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$								
(d) $a_0 := 1, a_n := a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$								
(e) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{2, 6, 18, 54, \dots\}$								
(f) $a_n := -2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$								

Aufgabe Ü3.2

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 = \frac{1}{4}$ und $a_{n+1} = a_n^2 + a_1$ für $n \geq 1$ konvergiert.

Aufgabe Ü3.3

Gegeben sei ein beliebiges Vermögen $a_0 > 0$, das jährlich jeweils einer Verzinsung von 3 %, einer Abschreibung von 4 % und einer Besteuerung von 2 % auf das aktuelle Vermögen unterliegt.

- Beschreiben Sie die Entwicklung der Vermögenswerte nach $n \in \mathbb{N}_0$ Jahren als Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.
- Zeigen Sie mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert.
- Ermitteln Sie, nach wievielen Jahren ein Anfangsvermögen von $a_0 = 100000$ € unter 50000 € bzw. unter 10000 € bzw. unter 1000 € bzw. unter 100 € gefallen ist.

(Hinweis zu (b): Hilfreich könnte die ggf. noch aus der Schule bekannte Gleichung $\ln(b^n) = n \cdot \ln(b)$ für $b > 0$ sein. Außerdem sei daran erinnert, dass $\ln(x) < 0$ für $x \in (0, 1)$. Weitere [hier nicht benötigte] Eigenschaften des natürlichen Logarithmus werden zu einem späteren Zeitpunkt wiederholt bzw. vertieft.)

Aufgabe Ü3.4

Stellen Sie eine Vermutung für den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf. Beweisen Sie die Konvergenz gegen den Grenzwert a mit Hilfe der $\varepsilon - n_0$ -Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen.

(a) $a_n = 3 + (-1)^n \frac{1}{n^2}$

(b) $a_n = (3 + (-1)^n) \frac{1}{n^2}$

(c) $a_n = \frac{2n+1}{3n-2}$

(d) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n}$

(e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(f) $a_n = \frac{c}{n!}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig sei