

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Aufgaben für die Übungen vom 09. bis 11.12.2015

Aufgabe Ü9.1

Beweisen Sie mit Hilfe der Definition des Funktionsgrenzwertes die folgenden Behauptungen:

- (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ist stetig in $x = 0$.
- (b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig ergänzbar.

Aufgabe Ü9.2

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionsgrenzwerte existieren, und geben Sie diese ggf. an:

- (a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6}{x^2 - x - 6}$ für $x_0 = -2, 0, 3$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt[3]{x^6 + 1}}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 7}{3x^3 - 2x - 1}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{2 - \sqrt{x}}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{x}$
- (f) $\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{4}} f(x)$ und $\lim_{x \downarrow \frac{\pi}{4}} f(x)$ für $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & , \quad x < \frac{\pi}{4} \\ \sin(2x) - \cos(4x) & , \quad x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Aufgabe Ü9.3

Weisen Sie mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$ -Kriteriums der Stetigkeit die folgenden Aussagen nach:

- (a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ ist stetig in $x_0 = 0$.
- (b) Die Funktion $f(x) = (x+1) \cdot \cos\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$ ist in $x_0 = -1$ stetig ergänzbar.
- (c) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ ist nicht stetig in $x_0 = 0$
- (d) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{Z} \\ 1 & , \quad x \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z} \\ -1 & , \quad x \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$ ist stetig für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und unstetig für alle $x \in \mathbb{Z}$.

(Hinweis zu (d): Fallunterscheidung $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $x_0 \in \mathbb{Z}$)