

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Aufgaben für die Übungen vom 16. bis 18.12.2015

Aufgabe Ü10.1

- (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion $f(x) := \frac{\sqrt{5+3x}-2}{3x+1}$ und untersuchen Sie, ob die Funktion auf ganz D stetig ist. Falls f in einem oder mehreren Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht definiert sein sollte, dann überprüfen Sie, ob f in x_0 stetig ergänzbar ist.
- (b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [-1, 1]$ die Abschätzung $|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{3}$ gilt. Weisen Sie unter Verwendung dieser Abschätzung mit dem $\varepsilon - \delta$ -Kriterium der Stetigkeit nach, dass die Funktion $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ in $x_0 = 0$ stetig ergänzbar ist mit dem Funktionswert $f(0) := 1$.

Aufgabe Ü10.2

Weisen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten nach, dass die folgenden Behauptungen richtig sind:

- (a) $f'(x_0) = 4x_0 + 3$ ist die Ableitung von $f(x) := 2x^2 + 3x - 9$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$
- (b) $f'(x) = -\sin(x)$ ist die Ableitung von $f(x) := \cos(x)$

Hinweis: Es gilt $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe Ü10.3

Gegeben seien die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktionen f für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

- (a) $f(x) = 3x^2 + \sin(x)$
- (b) $f(x) = 3x^2 \cdot \sin(x)$
- (c) $f(x) = \sin(3x^2) + 5$
- (d) $f(x) = \cos^2(3x^2)$
- (e) $f(x) = \frac{3x^2}{\sin(x) + 2}$
- (f) $f(x) = \ln\left(\exp(x^2) \cdot \frac{x^2+1}{x^4+1} \cdot 5^x\right)$

Aufgabe Ü10.4

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) := \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & \text{für } x < 0 \\ \exp(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ \exp(4-x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$ definiert. Untersuchen Sie die

Funktion f an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ auf Stetigkeit. Ist die Funktion an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ differenzierbar? Geben Sie die Ableitung für alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen f differenzierbar ist.