

---

# Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

---

## Aufgaben für die Übungen vom 06. bis 08.01.2016

### Aufgabe Ü11.1

Bestimmen Sie die Entwicklungsstelle  $x_0$  (d.h. den Mittelpunkt des Konvergenzintervalls) und den Konvergenzradius  $R$  der folgenden Potenzreihen  $\sum a_n(x - x_0)^n$ . Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren die Reihen?

(a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n n} (2x - 1)^{n-2}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3!} n^n \left(\frac{x}{2} - 1\right)^n$

### Aufgabe Ü11.2

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := \frac{1}{2^x}$ .

- (a) Entwickeln Sie  $f$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$  in eine Taylorreihe  $T(x)$ . Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert  $T(x)$ ?
- (b) Stellen Sie das Taylorpolynom 3. Grades  $T_3(x)$  von  $f(x)$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$  auf und geben Sie das zugehörige Restglied  $R_3(x)$  an. Weisen Sie nach, dass für das Restglied die Abschätzung  $|R_3(x)| \leq \frac{1}{400}$  für alle  $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  gilt. (*Hinweise: Es gilt  $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$  für alle  $a, b > 0$  und  $e \approx 2.718281828$ .)*

### Aufgabe Ü11.3

Entwickeln Sie die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \ln(1 + x)$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  in eine Taylorreihe. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die Taylorreihe von  $f$ ?

(Aufgabe Ü11.4 - siehe Seite 2)

### Aufgabe Ü11.4

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion mit

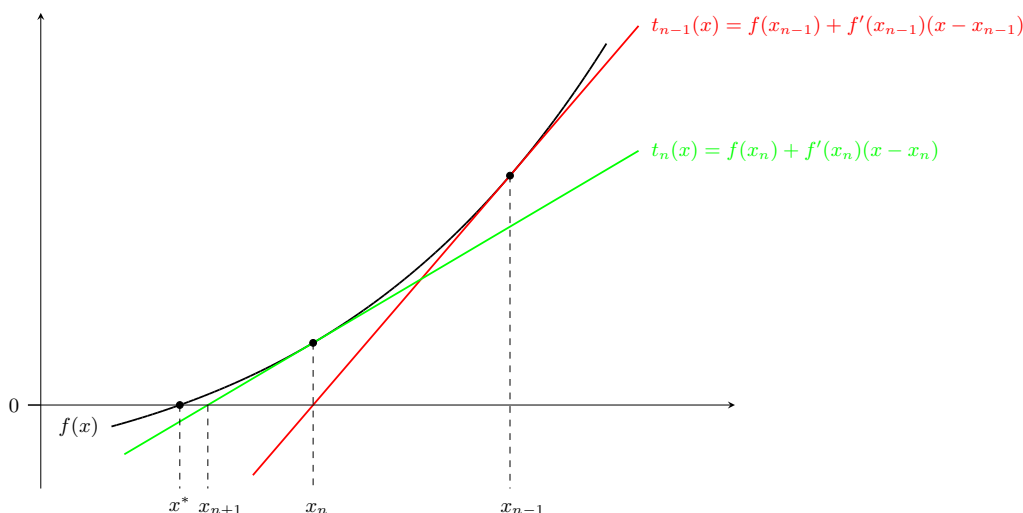
- (i)  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  (oder  $f(a) > 0$  und  $f(b) < 0$ ) und
- (ii)  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ .

Wegen (i) existiert nach dem Zwischenwertsatz ein  $x^* \in (a, b)$  mit  $f(x^*) = 0$ . Das Newton-Verfahren zur näherungsweisen Berechnung einer Nullstelle ergibt sich durch folgende Überlegungen: Als ersten Näherungswert wählt man irgendein  $x_0 \in [a, b]$ . Die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  hat die Gleichung  $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . Die Nullstelle von  $t(x)$  ist

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Mit  $x_1$  kann man nun analog verfahren. Allgemein sei  $x_n$  definiert. Dann schneidet die Tangente an  $f$  im Punkt  $(x_n, f(x_n))$  die  $x$ -Achse in

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\#)$$



- (a) Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiere gegen ein  $x^* \in (a, b)$ . Verifizieren Sie, dass dann  $f(x^*) = 0$  gilt.
- (b) Begründen Sie mit einem Beispiel, dass die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im Allgemeinen nicht konvergieren muss.
- (c) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren für  $x_0 = 1$  eine Nullstelle von  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2 - 2$  auf zwei Nachkommastellen genau.
- (d) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren die einzige im Intervall  $[0, 2]$  liegende Nullstelle von

$$f(x) = (\exp(x - 1) - \sin(x))^3 - 1$$

auf vier Nachkommastellen genau.

Bemerkung: Man kann verschiedene Bedingungen angeben, unter denen die Konvergenz des Verfahrens gegen eine Nullstelle von  $f$  gesichert ist. Ist zum Beispiel  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare *konvexe* Funktion mit Eigenschaft (i), und  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) \geq 0$  ist beliebig gewählt, dann kann man zeigen, dass dann genau ein  $x^* \in (a, b)$  mit  $f(x^*) = 0$  existiert, und dass die Folge  $(\#)$  wohldefiniert ist und monoton fallend gegen  $x^*$  konvergiert.