

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Aufgaben für die Übungen vom 27. bis 29.01.2016

Aufgabe Ü14.1

Gegeben sei für die Funktion $y = y(x)$ die lineare Differentialgleichung (kurz: DGL)

$$xy' = 2y$$

- (a) Erläutern Sie, warum es sich hierbei um eine DGL 1. Ordnung mit getrennten Variablen handelt. Geben Sie die DGL in impliziter und in expliziter Form an.
- (b) Zeichnen Sie im nachfolgenden Ausschnitt des Richtungsfeldes der DGL qualitativ die Lösungskurven ein, die den Anfangswerten $y(1) = 1$, $y(1) = -1$ bzw. $y(1) = 0$ genügen.

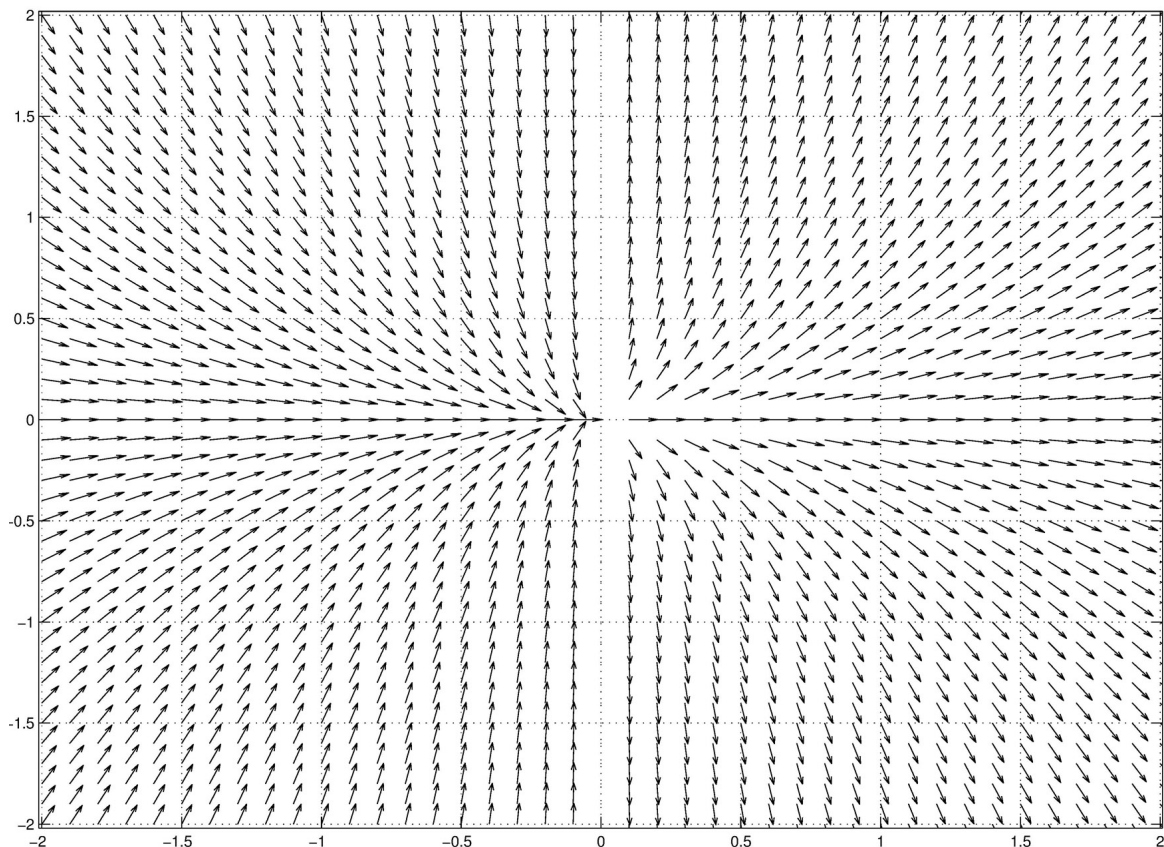


Abb. 1: Richtungsfeld zur DGL $xy' = 2y$.

- (c) Überprüfen Sie, ob die Funktionen $y_1(x) = 2e^{2-x}$ bzw. $y_2(x) = \frac{1}{2}x^2$ Lösungen der DGL zum Anfangswert $y(2) = 2$ sind.
- (d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL nach der Methode der Trennung der Variablen.

Aufgabe Ü14.2

Jetzt, mitten im Winter, sollte es Ihnen leicht fallen, sich das folgende, durchaus realistische Szenario vorzustellen: Nachdem Sie im Hochsommer nach einem Einkauf frisches Obst in die dafür vorgesehen Aufbewahrungsbehältnisse einsortieren wollen, fällt Ihnen unbemerkt ein Pfirsich zu Boden und rollt unter den Fernsehsessel, wo er zunächst nicht weiter auffällt. Da Sie sich in der vorlesungsfreien Zeit befinden, beschließen Sie kurzfristig einige Tage in den Urlaub zu fahren. Bei der Abreise haben Sie den immer noch unter dem Sessel liegenden Pfirsich sowie die vier Fruchtfliegen (*Drosophila*), die bereits um den in Zersetzung befindlichen Pfirsich herumswirren, immer noch nicht entdeckt. Während der nicht ganz stressfreien Bahnreise zum Urlaubsort lesen Sie durch Zufall in einer Zeitschrift einen interessanten Artikel, in dem geschrieben steht, dass R. Pearl um 1920 experimentell feststellte, dass die Änderungsrate $\frac{dP}{dt}$ einer Population von Fruchtfliegen mit der Populationsgröße zusammenhängt und der Gleichung

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2 \quad (*)$$

genügt, wobei die Zeit t in Tagen gemessen wird. Da Sie im vergangenen Semester zum Thema Differentialgleichungen zwar mit vielen theorielastigen Rechenaufgaben gequält wurden, aber keine Anwendungsbeispiele behandelt wurden, freuen Sie sich jetzt umso mehr, nachträglich eine Anwendung in der Natur kennengelernt zu haben. Zu diesem Zeitpunkt ahnen Sie noch nicht, dass Sie mit dieser Anwendung mehr zu tun haben, als Ihnen lieb ist. Denn als Sie nach genau drei Wochen gut erholt aus Ihrem Urlaub zurückkehren, erleben Sie Ihr blaues Wunder.

- (a) Wie viele Fruchtfliegen finden Sie näherungsweise bei Ihrer Rückkehr in Ihrer Wohnung vor? Wie viele Fruchtfliegen waren es nach zwei Tagen bzw. nach einer Woche?
- (b) Stellen Sie sich vor, dass Sie Ihren Urlaub beliebig lange fortsetzen können. Außerdem sei angenommen, dass die Fruchtfliegenpopulation auch nach restlosem Verzehr des Pfirsichs noch beliebig viel Nahrung in Ihrer Wohnung findet. Was wäre in diesem Fall passiert? Zeigen Sie dazu, dass die Population der Fruchtfliegen ständig wächst, ihre Mitgliederzahl aber nach oben beschränkt ist. Geben Sie die obere Schranke an.
- (c) Bei welcher Populationsgröße beginnt die Wachstumsrate abzunehmen? Nach wievielen Tagen wird dies näherungsweise der Fall sein?
- (d) Lösen Sie die Differentialgleichung (*) nach der Methode der Trennung der Variablen, wobei der im Text beschriebene Anfangszustand zu berücksichtigen ist. Berechnen Sie die (rechnerisch) exakte Anzahl der Fruchtfliegen bei Ihrer Rückkehr aus dem Urlaub sowie den Zeitpunkt, zu dem das Wachstum der Population verlangsamt wird. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus (a) bzw. (c), und diskutieren Sie ggf. Unterschiede.
- (e) Angenommen es gelingt Ihnen, gleich nach Ihrer Rückkehr die in der Wohnung befindlichen Fruchtfliegen zu zählen. Sie zählen 400 Individuen. Wieviele Tiere haben sich dann bereits am Tag der Abreise in Ihrer Wohnung aufgehalten?

Verwenden Sie zur Beantwortung der Teilaufgaben (a) bis (c) ausschließlich die Differentialgleichung und nicht deren Lösung aus (d).