Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Aufgaben für die Übungen vom 03. bis 05.02.2016

Aufgabe Ü15.1

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} 25 \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} & , \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Nullpunkt $(x,y) = (0,0)$ nicht stetig ist.

(b) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Aufgabe Ü15.2

Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $f(x,y) = x(1-x)ye^{-y}$

(b) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2x_2x_3 + 2x_2x_3 - x_1x_4 + \dfrac{x_1x_2x_3}{x_4+2x_1}$

Aufgabe Ü15.3

Eine *symmetrische* Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & . & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

heißt

- positiv definit, falls $\alpha^T \cdot A \cdot \alpha > 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- positiv semidefinit, falls $\alpha^T \cdot A \cdot \alpha \geq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- negativ (semi-) definit, falls $-A$ positiv (semi-) definit ist bzw.
- indefinit, falls A weder positiv noch negativ (semi-) definit ist, d.h. es gibt Vektoren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\alpha^T \cdot A \cdot \alpha > 0$ und $\beta^T \cdot A \cdot \beta < 0$.

Es gibt eine Reihe von äquivalenten Bedingungen, zum Beispiel mit Hilfe der Eigenwerte von A läßt sich zeigen, dass A genau dann positiv definit ist, wenn alle Eigenwerte λ_i von A positiv ($\lambda_i > 0$ für $i = 1,\dots,n$) sind bzw. A ist genau dann negativ definit, wenn alle Eigenwerte λ_i von A negativ ($\lambda_i < 0$ für $i = 1,\dots,n$) sind bzw. A ist genau dann indefinit, wenn A positive und negative Eigenwerte besitzt. Für positive oder negative Definitheit von A kann man auch die Hauptabschnittsdeterminaten Δ_i verwenden, die wie folgt definiert sind:

$$\Delta_1 \;:=\; a_{11} \quad , \quad \Delta_2 \;:=\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad \dots \quad , \quad \Delta_n \;:=\; \det(A)\,.$$

Dann ist A

- positiv definit, falls $\Delta_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$,
- negativ definit, falls $(-1)^i \Delta_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ bzw.
- indefinit, falls A nicht positiv oder negativ definit ist und $\Delta_n = 0$.

Für Semidefinitheit gibt es aber kein Kriterium, dass ausschließlich die Hauptabschnittsdeterminanten nutzt.

Überprüfen Sie, welche der folgenden Matrizen positiv definit, negativ definit bzw. indefinit sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe Ü15.4

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 \, .$$

(a) Stellen Sie die Höhenlinien $f(x, y) = c$ für $c = 0, 1, \ldots, 10$ über dem Gebiet

$$G = \Big\{ (x, y) \;\Big|\; x \in [-2, 2], y \in [-2, 2] \Big\}$$

grafisch dar.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen

$$\alpha := \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \beta := \frac{\partial f}{\partial y}$$

sowie

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \, .$$

(c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion f, d.h. Lösungen der Gleichung

$$\nabla f(x, y) := \left(\frac{\partial f}{\partial x} \, , \, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T = 0 \, .$$

(d) Untersuchen Sie, ob die symmetrische Matrix

$$\nabla^2 f(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

in den stationären Punkten f positiv definit, positiv semidefinit oder indefinit ist.

(e) Entscheiden Sie, ob f in den stationären Punkten ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder einen Sattelpunkt besitzt.

Aufgabe Ü15.5

Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = -\frac{1}{6} x^6 - 2y^4 + 64y + 8x^2 \, .$$

Aufgabe Ü15.6

Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x(1 - x) y e^{-y} \, .$$