

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Aufgaben für die Zusatzübung am 09.02.2016

Aufgabe Ü16.0

- (a) Lösung der Aufgaben Ü15.5 und Ü15.6
- (b) Lösung der Zwischenklausur vom 10.12.2015

Aufgabe Ü16.1

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Zahlenfolge, von der bekannt sei, dass sie für $n \geq 10000$ monoton wächst. Welcher der folgenden Zusammenhänge zwischen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und der Menge $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist richtig?

- ☐ (a) $\sup(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$
- ☐ (b) $\sup(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
- ☐ (c) $\sup(M) > \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
- ☐ (d) $\sup(M) < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
- ☐ (e) Es ist keine Aussage über den Zusammenhang zwischen $\sup(M)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ möglich.

Aufgabe Ü16.2

- (a) Berechnen Sie den Funktionsgrenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x + 2}{8x^3 - 9x^2 + 7}$$

- (i) mit Hilfe der Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte sowie
- (ii) mit der Regel von l'Hospital.

- (b) Kann die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\ln(2 - x^2)}{e^{1-x} - \sqrt{2x-1}}$$

in $x = 1$ zu einer stetigen Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ergänzt werden?

- (c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \downarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right)^{(x-1)}$ mit der Regel von l'Hospital.

Aufgabe Ü16.3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} + 3 & , \quad x < 0 \\ c & , \quad x = 0 \\ x^2 - 2x + 4 & , \quad x > 0 \end{cases} .$$

- (a) Bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass f für $x = 0$ stetig ist.
- (b) Ist die Funktion f mit der in (a) ermittelten Konstanten c in $x = 0$ differenzierbar?
- (c) Berechnen Sie eine Stammfunktion von f .

Aufgabe Ü16.4

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^x$.

- (a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_3(x)$ vom Grad 3 zu f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.
- (b) Schätzen Sie den Fehler $|f(x) - T_2(x)|$ ab, wenn f im Intervall $I = [0, 2]$ durch T_3 approximiert wird.
- (c) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T(x)$ zu f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $T(x)$ gegen $f(x)$?

Aufgabe Ü16.5

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x+1}$.

- (a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ vom Grad 2 zu f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
- (b) Schätzen Sie den Fehler $|f(x) - T_2(x)|$ ab, wenn f im Intervall $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ durch T_2 approximiert wird.

Aufgabe Ü16.6

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (x-1)^2(x-4)^3 .$$

Aufgabe Ü16.7

- (a) Berechnen Sie das Integral $\int (x^2 - 1)x \, dx$ mit partieller Integration.

- (b) Lösen Sie das Integral $\int_{2\sqrt{2}}^4 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} \, dx$.

- (c) Ermitteln Sie alle Stammfunktionen der Funktion $f(x) = 8x^2 \cos(5x^3)$.

- (d) Berechnen Sie $\int_{3-e}^2 \frac{3x-5}{x^2-2x-3} \, dx$.

- (e) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy' - 6xe^y = 3x^2y' - e^y, \quad x \neq \frac{1}{3}, \quad y\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) = -1 .$$

Aufgabe Ü16.8

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten zur periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := x^2, \quad x \in [-\pi, \pi] \quad \text{und} \quad f(x+2k\pi) = f(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad k \in \mathbb{Z} .$$