

Mathematik IT 3 (Analysis)

für die Studiengänge Informatik, IMT und eBusiness im Wintersemester 2015/2016

Zwischenklausur vom 10. Dezember 2015

Name : _____
 Matrikelnummer : _____
 Übungsgruppe : _____

Aufgabe(n)	1 bis 5	6	7	8	9	10	Σ	Note	Zusatzpkt. f. d. Prüfung
mögliche Punkte	10	10	15	5	15	5	60	-	7
erreichte Punkte									

Hinweise: In den Ankreuzfragen 1 bis 5 gibt es *genau eine* richtige Antwort. Kreuzen Sie in den Aufgaben 1 bis 5 jeweils die richtige Antwort an, eine Begründung für Ihre Auswahl ist nicht notwendig, für falsche Antworten werden keine negativen Punkte vergeben. Bei den Aufgaben 6 bis 10 muss jede Lösung klar begründet und der Lösungsweg nachvollziehbar angegeben werden. Außer den Vorlesungs- und Übungsmitschriften (aus dem aktuellen Wintersemester) und einer Formelsammlung sind keine Hilfsmittel erlaubt! Alle technischen Geräte sind abzuschalten und außer Reichweite zu legen. Bitte nicht mit roter Farbe schreiben! Halten Sie bitte Ihren Studierendenausweis zur Kontrolle bereit. **Bearbeitungszeit: 80 Minuten**

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $\alpha \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl. Man kann zeigen, dass es eine kleinste natürliche Zahl n_0 gibt, so dass

$$n_0 \left(1 + \frac{\alpha^4}{2} \right) - \sqrt{n_0} > 2 + \frac{4}{2}\alpha^4 - \sqrt{n_0} + n_0$$

gilt. Wodurch wird die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$ gesichert?

- ☐ (a) Axiom des Archimedes
- ☐ (b) Peano-Axiome
- ☐ (c) Vollständige Induktion

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Welche Aussage ist für die Menge $M = \left\{ -|\sin(n-1)| \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ richtig?

- ☐ (a) $\min(M) = \inf(M) = -1$ und $\max(M) = \sup(M) = 0$.
- ☐ (b) $\min(M) = \inf(M) = 0$ und $\max(M) = \sup(M) = 1$.
- ☐ (c) M besitzt kein Minimum und es gilt $\inf(M) = -1$ und $\max(M) = \sup(M) = 0$.
- ☐ (d) M besitzt kein Maximum und es gilt $\min(M) = \inf(M) = -1$ und $\sup(M) = 0$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Behauptung: „Zu allen $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ existiert ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $x < z < y$ “. Ist dies richtig oder falsch?

- ☐ (a) richtig
- ☐ (b) falsch

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $0 \leq a_{n+1} \leq \frac{10}{11} a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche Aussage bzgl. der Konvergenz ist für die Reihe $R := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ möglich?

- ☐ (a) Es ist keine Aussage über die Konvergenz oder Divergenz der Reihe R möglich.
- ☐ (b) Die Reihe R ist wegen $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq \frac{10}{11}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ divergent.
- ☐ (c) Die Reihe R ist wegen $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{10}{11}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergent.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Es seien $M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^7 = \exp(iz \cdot \ln(3)) \right\}$ und $M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^7 = 3 \right\}$. Behauptung: „Es existieren Elemente $z_1 \in M_1$ und $z_2 \in M_2$, so dass $z_2 < z_1$ gilt.“

- ☐ (a) Die Behauptung ist falsch, da keine Elemente $z_1 \in M_1$ und $z_2 \in M_2$ mit $z_2 < z_1$ existieren.
- ☐ (b) Die Behauptung ist falsch, da für alle $z_1 \in M_1$ und alle $z_2 \in M_2$ gilt: $z_2 = z_1$.
- ☐ (c) Die Behauptung ist unzulässig, da es auf $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation gibt.
- ☐ (d) Die Behauptung ist unzulässig, da M_1 und M_2 leer sind.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

- (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (b) Sei ein beliebiges $y \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $4xy \leq 2x^2 + 2y^2$.
- (c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der Ungleichung

$$\frac{2}{|x-1|} \leq \frac{x}{x^2-1}.$$

Geben Sie das Infimum und das Supremum von $\mathcal{L}$ an. Hat $\mathcal{L}$ ein Minimum und ein Maximum?

Aufgabe 7 (15 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Folgen $(a_n)_{n \in N}$ konvergieren, wobei je nach Definition der Folgenglieder $N = \mathbb{N}$ oder $N = \mathbb{N}_0$ ist. Falls eine Folge konvergiert, dann geben Sie ihren Grenzwert an.

(a) $a_n := \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1} - \left(\frac{3n^2 + 8n - (-1)^n}{(-1)^n n + 888\sqrt{n} - 7n^2} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$

(b) $a_n := \frac{b_n - c_n}{n^2}, \quad$ wobei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen sind mit

$$b_n \in [-5, 2] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad c_n \in [-1, 6] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

(c) $a_0 := 0$ und $a_{n+1} := a_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0$

(d) $a_0 := 2$ und $a_{n+1} := \sqrt{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$

(e) $a_n := \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := (-1)^n + 4n - 8 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + c_n,$$

wobei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge ist mit $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{3k} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_{3k+1} = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_{3k+2} = -7.$

Aufgabe 9 (15 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \cos(n)}{(\ln(n))^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(3 + (-1)^n)^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sqrt{n}}{(n+2)!}$

(d) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-3)^n + (-1)^{n+1}}{4^n + 8}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n+1}$

Aufgabe 10 (5 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2-1}.$

(b) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sei eine stetige Funktion. Beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f einen *Fixpunkt* hat, d.h. ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$ existiert. Kann auf die Voraussetzung der Stetigkeit von f verzichtet werden?