Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

Lehrstuhl Mathematik, insbesondere
Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. L. Cromme

Praktikum Mathematische Modellierung

für die Studiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik, Informatik und Physik im Wintersemester 2015/16

Aufgabenblatt 1

Für die Lösung der Projektaufgaben sind Programmierkenntnisse mit Matlab oder Octave erforderlich. Die nachfolgenden Aufgaben sollen Sie ein wenig darauf vorbereiten bzw. Programmierkenntnisse auffrischen. Falls Sie noch nie bzw. selten mit Matlab gearbeitet haben, dann finden Sie auf der Internetseite zur Lehrveranstaltung einige Hinweise zur Arbeit mit Matlab bzw. einige Links zu weiteren Matlab-Einführungen. Octave ist zu Matlab weitgehend ähnlich. Die Aufgaben dürfen Sie in Gruppen von maximal zwei Teilnehmern bearbeiten. Die Lösungen, d.h. in diesem Fall die mit kurzen Kommentaren versehenen Matlab-Quelltexte, senden Sie bitte bis spätestens zum 02.11.2015, 13:00 Uhr per E-Mail an jens.kunath@tu-cottbus.de unter **Betreff: Modellierung**. Senden Sie bitte außerdem auch die mit ihren Funktionen berechneten Lösungen zu unten stehenden Aufgaben bzw. zu selbst gewählten Beispielen mit.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `erzeugeBasisvektor.m`, mit der ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \big(a_{ij}\big) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ zu beliebig vorgegebenen Indizes $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$ in ein äquivalentes Gleichungssystem $\tilde{A}x = \tilde{b}$ überführt werden kann, so dass in der j-ten Spalte der i-te Einheitsvektor aus $\mathbb{R}^m$ steht. Falls dabei $a_{ij} = 0$ gelten sollte, so soll $\tilde{A} = A$ und $\tilde{b} = b$ gelten. Berücksichtigen Sie außerdem geeignete, einfache Maßnahmen, um Rundungsfehler hinsichtlich Matrixeinträgen abzufangen, die näherungsweise Null sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Sei $Rx = c$ ein lineares Gleichungssystem mit $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$, wobei R eine obere Dreiecksmatrix ist, in deren ersten $r := \mathrm{rg}(R)$ Spalten in der i-ten Spalte der i-te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^m$ steht ($1 \le i \le r$). Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `bestimmeLoesungsmenge.m`, die zu $Rx = b$ die Lösungsmenge bestimmt. Ist das System unlösbar, so soll eine leere Matrix `[]` zurückgegeben werden, im Fall der eindeutigen Lösbarkeit soll die Lösung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ als Vektor zurückgegeben werden. Ist das System mehrdeutig lösbar, so soll die Lösungsmenge als anonyme Funktion $F : \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^m$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}) \\ f_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}) \\ \vdots \\ f_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}) \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{pmatrix} =: F\big(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}\big)$$

zurückgegeben werden. Bevor die Lösung(smenge) bestimmt wird, soll die Funktion außerdem prüfen, ob das Gleichungssystem die geforderten Eigenschaften erfüllt. Ist dies nicht der Fall, dann soll mit einer Fehlermeldung abgebrochen werden. Weiterhin soll *optional* die Möglichkeit bestehen, dass die Reihenfolge der Variablen mittels einer Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ vertauscht ist. In diesem Fall sollen die Variablen in Ihrer richtigen Reihenfolge $\big(x_1, \ldots, x_n\big)^T$ zurückgegeben werden.

(Aufgaben 3 bis 5 - siehe Seite 2f.)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Schreiben Sie unter Verwendung der Funktionen `erzeugeBasisvektor.m` und `bestimmeLoesungsmenge.m` eine Funktion `gauss_jordan_mit_ZS_pivotisierung.m` zur Lösung eines beliebigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ nach dem Gauß-Jordan-Eliminationsverfahren mit Zeilen und Spaltenpivotisierung. Die Rückgabe der Lösung(en) soll analog zu Aufgabe 2 erfolgen. Falls vom Anwender gewünscht, so soll optional die aus $[A, b]$ hervorgehende Zeilenstufenform $[\tilde{A}, \tilde{b}]$ zurückgegeben werden, wobei der i-ten Spalte von $\tilde{A}$ die Variable x_i zugeordnet sein soll.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Testen Sie Ihr Programm aus Aufgabe 3, und bestimmen Sie damit die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme. Prüfen Sie dabei, ob die berechneten Vektoren bzw. Lösungsmengen tatsächlich das jeweilige Gleichungssystem lösen.

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ -x_1 & & & & & & & = & -4 \\ & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & -3 \\ & & & - & x_3 & & & = & -2 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ -x_1 & & & & & & & = & -4 \\ & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & -3 \\ & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & & & & & + & x_4 & = & -4 \\ -4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -10 \end{array}$$

(d) $A \cdot x = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \\ -3 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(e) $A \cdot x = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Liegen die Vektoren $x^1 = \left(-\frac{5}{4}, -3, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{4}, -\frac{9}{2}, 0\right)^T$ und $x^2 = \left(-\frac{4}{5}, -3, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2, 0, -\frac{4}{5}, 0\right)^T$ in der Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 & 2 & 9 & 0 & 8 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 9 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 9 & 4 & 9 & 9 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 5} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad ?$$

Falls ja, dann geben Sie u.a. durch Verwendung des Programms aus Aufgabe 3 und weiterer Matlab-Funktionen die konkreten Werte $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$ für die frei wählbaren Variablen an, mit denen der Vektor x^1 bzw. x^2 erhalten wird. Wenden Sie dabei zwei verschiedene Methoden an:

(a) Lösung eines linearen Gleichungssystems (mit Hilfe der Funktion aus Aufgabe 3)

(b) Verwendung der Matlab-Funktion `fsolve.m`

Schreiben Sie dazu Matlab-Funktionen `vektor_in_loesungsmenge.m` (für (a)) bzw. `vektor_in_loesungsmenge_fsolve.m` (für (b)), denen das Gleichungssystem $Ax = b$ und ein beliebiger Vektor $x^* \in \mathbb{R}^m$ übergeben werden. Die Funktionen sollen zwei Parameter zurückgeben: Eine Variable `entscheidung`, die gleich Eins ist, falls $x^* \in \mathcal{L}$ bzw. gleich Null ist, falls $x^* \notin \mathcal{L}$. Außerdem eine Variable `param`, die im Fall von mehrdeutigen Lösungen und $x^* \in \mathcal{L}$ die Werte für $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$ als Vektor enthält, anderfalls ist `param = []`.

Hinweise:

- Bei den Aufgaben 1 bis 5 genügt es, wenn Sie die gut kommentierten (!) Quelltexte per E-Mail abgeben. Ein Ausdruck ist nicht erforderlich.
- Die selbst programmierten Funktionen sollen auch grob prüfen, ob die eingegebenen Parameter den erforderlichen Anforderungen genügen (z.B., ob Dimensionen von Matrizen und Vektoren zueinander passen). Sind diese nicht erfüllt, dann soll mit einer Fehlermeldung (`error`-Funktion) abgebrochen werden oder wenn es sinnvoll erscheint soll versucht werden, mittels `try-catch-end`-Anweisungen weiterzurechnen.
- Bei den Aufgaben 4 und 5 sind die Lösungen schriftlich abzugeben. Wir empfehlen einen geeigneten, auszugweisen Ausdruck der Eingaben und Ausgaben im Matlab-Kommandofenster.

Anhang: Gauß-Jordan-Verfahren mit Zeilen- und Spaltenpivotisierung

- **Schritt 1:**

  Eingabe: $(A|b)$ sei eine reelle $\big(m \times (n+1)\big)$ Matrix (Ausgangstableau, $m, n \in \mathbb{N}$)

  Ausgabe: $(R|c) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$, wobei

$$R \;=\; \left(\begin{array}{c|c} E_r & D_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

  eine obere Dreiecksmatrix ist, so dass E_r die Einheitsmatrix aus $\mathbb{R}^{r \times r}$ ist, $D_r \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$ eine beliebige Matrix ist und in den letzten $n-r$ Zeilen von R stehen nur Nulleinträge; weitere Ausgabe: Permutation π mit $Rx_\pi = c \Leftrightarrow Ax = b$; dabei ist $r = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(R)$

  Rechenschritte:

  1.0: Setzte $\pi = \big(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\big) = \big(1, 2, \ldots, n\big)$.

  1.1: Für $j = 1, 2, \ldots, \min(m, n)$ und im aktuellen Tableau führe folgende Schritte 1.2 bis 1.6 durch:

  1.2: Bestimme q und s mit

$$\big|a_{qs}\big| = \max_{\substack{j \le i \le m \\ j \le k \le n}} \big|a_{ik}\big|$$

  1.3: Falls $\big|a_{qs}\big| = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Abbruch!
  mit: $r = \mathrm{rg}(A) = j - 1$; $(R|c)$ als aktuellem Tableau; Ausgabe von R, c, π, r

  1.4: a) Vertausche Zeile j mit Zeile q und danach Spalte j mit Spalte s im aktuellen Tableau
  b) Vertausche in π die Werte $\pi(j)$ und $\pi(s)$

  1.5: Dividiere die j-te Zeile durch a_{jj}.

  1.6: Subtrahiere für $\quad i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m \quad$ das $\quad a_{ij}$-fache $\quad$ der Zeile j von Zeile i.

  Mit der Ausgabe R, c und π aus Schritt 1 führe die Rückwärtssubstitution durch:

- **Schritt 2:**

  Eingabe: $(R|c) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$, wobei

$$R \;=\; \left(\begin{array}{c|c} E_r & D_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

  eine obere Dreiecksmatrix ist, so dass E_r die Einheitsmatrix aus $\mathbb{R}^{r \times r}$ ist, $D_r \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$ eine beliebige Matrix ist und in den letzten $n-r$ Zeilen von R stehen nur Nulleinträge; weitere Ausgabe: Permutation π mit $Rx_\pi = c \Leftrightarrow Ax = b$; dabei ist $r = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(R)$

  Ausgabe: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Rx_\pi = c$

  Rechenschritte:

  2.1: Falls es ein $k \in \{r+1, r+2, \ldots, m\}$ mit $c_k \neq 0$ gibt $\quad \Rightarrow \quad$ Abbruch! (es gibt keine Lösung)

  2.2: Wähle $x_{\pi(r+1)}, \ldots, x_{\pi(n)} \in \mathbb{R}$ beliebig.

  2.3: Für $k = r, r-1, \ldots, 1$ berechne $\quad x_{\pi(k)} = c_k - r_{k,r+1} x_{\pi(r+1)} - \ldots - r_{k,n} x_{\pi(n)}$